

ПЕРВОПОРЯДКОВАЯ ЛОГИКА НАПРАВЛЕННОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ R_Q . ЧАСТЬ I: АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Н. И. Стешенко

Первопорядковая логика направленности изменения есть предикатное расширение логики Л. Роговского¹. Г. Панти, характеризуя в обзорной работе предикатные расширения различных многозначных логик, отмечал: «Если оставить в стороне технические проблемы, то на самом деле отсутствует убедительная философская и лингвистическая интерпретация. В большинстве случаев авторы попросту пропускают обсуждения этих интерпретаций и прямо переходят к техническому содержанию анализируемых логик»². Что касается философского содержания первопорядковой логики направленности, то оно остается таким же, как и в логике Роговского, но гегелевский переход описывается более сильным по своим выразительным возможностям языком. Под лингвистической интерпретацией, всего скорее, применительно к нашему случаю, имеются в виду примеры выражений естественного языка, являющихся аналогом основных понятий логики направленности изменения. С этой точки зрения несложно указать в естественном языке примеры операторов логики направленности изменения: «Возникает так, что предмет x имеет свойство P », «Уже все предметы x начали краснеть», «Еще не все студенты сдали контрольные работы» и т. д. Таким образом, можно утверждать, что критические замечания Г. Панти в адрес предикатных расширений многозначных логик в нашем случае не имеют силы.

§ 1. Синтаксис первопорядковой логики направленности изменений

В языке первопорядковой логики направленности и изменения используются следующие категории символов:

(1) Одноместные и двухместные операторы пропозициональной логики Роговского: $>$ («если, ...то»), V («возникает так, что...»), \sim («неверно, что...»), T («есть так, что...»), I («исчезает так, что...»), U («уже есть так, что...»), E («еще есть так, что...»).

(2) Счетное множество переменных V : $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$

(3) Счетное множество индивидуальных констант C : $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \dots$

¹ Rogowski L. S. Logika kierunkowa a heglowska teza o spreczności zmiany. Toruń, 1969.

² Panti G. Multi-valued Logics // Archive of Mathematics Logic. Vol. 1. 1995, 19 Apr. P. 19.

(4) Счетное множество предикатных символов $R: P_1^n, P_2^n, \dots$, где верхний индекс указывает число аргументных мест предикатов. Если $n = 0$, то предикат является пропозициональной переменной: p, g, γ, \dots . Тем самым имеется возможность использовать подстановочные случаи тавтологий пропозициональной логики Роговского.

(5) Кванторы: \leftrightarrow, \exists . (6). Левые и правые скобки.

Определение 1 (терма):

- (1) Любая переменная является термом.
- (2) Любая константа является термом.
- (3) Ничто иное не есть терм.

Определение 2 (формулы):

- (1) Атомарная формула логики предикатов есть выражение вида $P(t_1, \dots, t_n)$, где t_1, \dots, t_n есть термины, а P есть n -арный предикатный символ, $n \geq 1$.
- (2) Любая атомарная формула логики предикатов является формулой.
- (3) Если A — формула, то $\bullet A$ — формула, где $\bullet \in \{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
- (4) Если A и C — формулы, то $A \rightarrow C$ формула.
- (5) Если A — формула и x переменная, принадлежащая A , то выражения $\leftrightarrow xA, \exists xA$ — формулы.
- (6). Ничто иное не есть формула.

Определения свободного и связанного вхождения переменной в формулу стандартное.

Определение 3 (подстановки):

Подстановкой называется отображение $\delta: V \rightarrow \text{Ter}$ из множества V переменных в множество Ter термов.

Пусть δ подстановка. Через δ_x обозначим подстановку, которая отличается от подстановки δ тем, что не замещает переменной « x » никаким термином, т.е. для любой переменной « y » имеем:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} \delta(y), & \text{если } y \neq x. \\ x, & \text{если } y = x. \end{cases}$$

Распространим понятие подстановки на формулу:

- (1). $\delta(P(t_1, \dots, t_n)) = P(\delta(t_1), \dots, \delta(t_n))$, где $P(t_1, \dots, t_n)$ атомарная формула.
- (2). $\delta(\bullet A) = \bullet \delta(A)$, где $\bullet \in \{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

- (3). $\delta(A > B) = \delta(A) > \delta(B)$.
 (4). $\delta(\leftrightarrow A(x)) = \leftrightarrow x(\delta_x A(x))$.
 (5). $\delta(\exists A(x)) = \leftrightarrow \exists x(\delta_x A(x))$.

Определение *правильной*, т.е. *свободной подстановки*, и определение *подформулы* обычное и вводится индукцией по построению формулы.

§2. Семантика *первопорядковой логики направленности изменения*

Определение 1 (модели):

Модель *первопорядкового языка логики направленности изменения* $L(R_Q)$ есть пара $M = \langle D, I \rangle$, где:

D — непустое множество объектов, называемое областью интерпретации;

I — есть отображение, называемое интерпретацией, которое:

- (1) каждой индивидуальной константе $a \in C$ сопоставляет элемент $a^I \in D$;
 (2) каждому предикатному символу $P^n \in R$ сопоставляет четыре непересекающиеся подмножества $D_3^n, D_2^n, D_0^n, D_1^n$ множества D^n . Два последних подмножества D_0^n, D_2^n являются соответственно дополнением подмножеств D_3^n, D_1^n . Это дополнение соответствует в языке отрицанию.

Опишем (в языке теории множеств) отношения между указанными множествами точнее, но более громоздко:

$$\begin{aligned} D_3^n \cap D_0^n &= \emptyset, D_3^n \cup D_0^n = D_+^n, D_0^n = D_+^n \setminus D_3^n, \\ D_2^n \cap D_1^n &= \emptyset, D_2^n \cup D_1^n = D_{++}^n, D_1^n = D_{++}^n \setminus D_2^n, \\ D_+^n \cap D_{++}^n &= \emptyset, D_+^n \cup D_{++}^n = D^n. \end{aligned}$$

Дополнение предиката P^n обозначим через CP^n . Дальше выражение «если и только если» (метаязыковая эквиваленция) сокращаем посредством символа « \Leftrightarrow », а метаязыковую импликацию — « \Rightarrow »

(2.1) $(P^n)^I \subset D_3^n$, т.е. предикатному символу P^n ставится в соответствие n — местное отношение.

(2.2) $(P^n)^I = (BP^n)^I \subset D_2^n$, т.е. предикатному символу P^n ставится в соответствие n — ка объектов, находящихся в отношении возникновения.

$$(2.3) (CP^n)^I \subset D_0^n \Leftrightarrow (P^n)^I \not\subset D_0^n \Leftrightarrow (P^n)^I \subset D_3^n.$$

$$(2.4) (CP^n)^I \subset D_1^n \Leftrightarrow (P^n)^I \not\subset D_1^n \Leftrightarrow (P^n)^I \subset D_2^n.$$

Определение 2 (приписывания значений переменным):

Приписыванием значения переменным в модели M есть отображение $B: V \rightarrow D$ из множества переменных V в множество объектов D модели M . Образ переменной $x \in V$ при приписывании B обозначается через $x^B, x^B \in D$.

Определение 3 (приписывание значения термину):

(а) Для константного символа $a, a^{I^B} = a^I$.

(б) Для переменной $x, x^{I^B} = x^B$.

Теперь все готово, чтобы дать семантические характеристики формулы.

Определение 4. Пусть B есть приписывание значений переменным в модели $M = \langle D, I \rangle$.

Для каждой предикатной формулы Φ языка $L(R_q)$ определим истинностное значение $(3, 2, 1, 0)$ формул следующим образом.

(1) Атомарная формула:

$$(1.1) [P(t_1, \dots, t_n)]^{I, B} = 3 \Leftrightarrow \langle t_1^{I, B}, \dots, t_n^{I, B} \rangle \in P^I \subset D^n_3.$$

$$(1.2) [P(t_1, \dots, t_n)]^{I, B} = 0 \Leftrightarrow \langle t_1^{I, B}, \dots, t_n^{I, B} \rangle \notin P^I \subset D^n_3 \Leftrightarrow \langle t_1^{I, B}, \dots, t_n^{I, B} \rangle \in CP^I \subseteq D^n_0.$$

$$(1.3) [P(t_1, \dots, t_n)]^{I, B} = 2 \Leftrightarrow \langle t_1^{I, B}, \dots, t_n^{I, B} \rangle \in (BP)^I \subset D^n_2.$$

$$(1.4) [P(t_1, \dots, t_n)]^{I, B} = 1 \Leftrightarrow \langle t_1^{I, B}, \dots, t_n^{I, B} \rangle \notin (BP)^I \subset D^n_2 \Leftrightarrow \langle t_1^{I, B}, \dots, t_n^{I, B} \rangle \in C(BP)^I \subset D^n_0.$$

$$(2.1) [BA]^{I, B} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 2; (2.2). [BA]^{I, B} = 2 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 0.$$

$$(2.3) [BA]^{I, B} = 1 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 3; (2.4). [BA]^{I, B} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 1.$$

$$(3) [\sim A]^{I, B} = i \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 3 - i, \text{ где } i \in \Gamma_4 = \{3, 2, 1, 0\}; (4). [IA]^{I, B} = [\sim BA]^{I, B}.$$

$$(5.1) [TA]^{I, B} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 3.$$

$$(5.2) [TA]^{I, B} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 2 \text{ или } [A]^{I, B} = 1 \text{ или } [A]^{I, B} = 0.$$

$$(6.1) [EA]^{I, B} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 3 \text{ или } [A]^{I, B} = 1.$$

$$(6.2) [EA]^{I, B} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 2 \text{ или } [A]^{I, B} = 0.$$

$$(7.1) [YA]^{I, B} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 3 \text{ или } [A]^{I, B} = 2.$$

$$(7.2) [YA]^{I, B} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 2 \text{ или } [A]^{I, B} = 0.$$

$$(8) [A > B]^{I, B} = [A]^{I, B} > [B]^{I, B}.$$

$$(8.1) [A]^{I, B} > [B]^{I, B} = 3 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 3 \text{ или } [B]^{I, B} = 3 \Leftrightarrow ([A]^{I, B} = 3 \Rightarrow [B]^{I, B} = 3).$$

$$(8.2) [A]^{I, B} > [B]^{I, B} = 2 \Leftrightarrow ([A]^{I, B} = 1 \text{ и } [B]^{I, B} \neq 3) \text{ или } ([B]^{I, B} = 2 \text{ и } [A]^{I, B} \neq 0).$$

$$(8.3) [A]^{I, B} > [B]^{I, B} = 1 \Leftrightarrow ([A]^{I, B} = 3 \text{ и } [B]^{I, B} = 2) \text{ или } ([A]^{I, B} = 2 \text{ и } [B]^{I, B} = 1 \text{ или } [B]^{I, B} = 0).$$

$$(8.4) [A]^{I, B} > [B]^{I, B} = 0 \Leftrightarrow [A]^{I, B} = 3 \text{ и } [B]^{I, B} = 0.$$

Для придания истинностных значений кванторным формулам преобразуем стандартное понятие модели в Эрбранову модель. Последняя есть техническое упрощение стандартной модели, весьма удобное для семантической работы с кванторными формулами.

Определение 5 (эрбрановой модели)³:

Модель $M = \langle D, I \rangle$ языка $L(R_q)$ называется эрбрановской, если выполняются два условия:

(1) D состоит из констант языка $L(R_q)$.

³ Fitting M. First-Order Logic and Automated Theorem Proving. New York; London, 1990. P. 107.

(2) Для каждой константы a принимается $a^I = a$, т.е. интерпретацией константы является сама константа.

В Эрбрановой модели приписывание значения переменной в \mathbf{M} является также подстановкой константы на место переменной, и наоборот. Техническая сторона преобразования стандартной модели в эрбрановскую хорошо изложена в работе М.Фиттинга⁴. Это преобразование дано для двухзначной логики. Оно автоматически переносится на четырехзначный случай, так как понятия приписывания значений переменной и понятие подстановки термина на место переменной для двухзначной и четырехзначной логики совпадают.

Тогда определение (1.1) модифицируется следующим образом:

$$(1.1) [P(t_1, \dots, t_n)]^{I^B} = 3 \Leftrightarrow [P(t_1/a_1, \dots, t_n/a_n)]^I = 3 \Leftrightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in P^I \subseteq D^n.$$

Остальные определения истинности формулы в модели модифицируются сходным образом.

Дальше в правой (определяющей) части определений истинностных значений для кванторных формул метавыражения «для любого(некоторого) термина, принадлежащего ...» заменяются кванторами. Но они, конечно, не принадлежат к объектному языку $L(R_Q)$, эта замена приводится в целях лучшего обозрения определений.

$$[9.1] [\leftrightarrow xA]^{I^B} = 3 \Leftrightarrow (\leftrightarrow a \in D^n_3) A(x/a) = 3, \text{ где } 1 \leq n \leq j$$

(п – есть число аргументов А).

$$[9.2] [\leftrightarrow xA]^{I^B} = 2 \Leftrightarrow (\exists a \in D^n_2) A(x/a) = 2 \text{ и } [(\leftrightarrow v \in D^n_2) A(x/v) = 2 \text{ или } (\leftrightarrow v \in D^n_3) A(x/v) = 3], 1 < n < j.$$

$$[9.3] [\leftrightarrow xA]^{I^B} = 1 \Leftrightarrow (\exists a \in D^n_1) A(x/a) = 1 \text{ и } [(\leftrightarrow v \in D^n_1) A(x/v) = 1 \text{ или } (\leftrightarrow v \in D^n_2) A(x/v) = 2, \text{ или } (\leftrightarrow v \in D^n_3) A(x/v) = 3], 1 < n < j.$$

$$[9.4] [\leftrightarrow xA]^{I^B} = 0 \Leftrightarrow (\exists a \in D^n_0) A(x/a) = 0, \text{ где } 1 \leq n \leq j.$$

$$[10.1] [\exists xA]^{I^B} = 3 \Leftrightarrow (\exists a \in D^n_3) A(x/a) = 3, \text{ где } 1 < n < j.$$

$$[10.2] [\exists xA]^{I^B} = 2 \Leftrightarrow (\exists a \in D^n_2) A(x/a) = 2 \text{ и } [(\leftrightarrow v \in D^n_0) A(x/v) = 0 \text{ или } (\leftrightarrow v \in D^n_1) A(x/v) = 1, \text{ или } (\leftrightarrow v \in D^n_2) A(x/v) = 2], 1 < n < j.$$

$$[10.3] [\exists xA]^{I^B} = 1 \Leftrightarrow (\exists a \in D^n_1) A(x/a) = 1 \text{ и } [(\leftrightarrow v \in D^n_0) A(x/v) = 0 \text{ или } (\leftrightarrow v \in D^n_1) A(x/v) = 1], 1 < n < j.$$

$$[10.4] [\exists xA]^{I^B} = 0 \Leftrightarrow (\leftrightarrow a \in D^n_0) A(x/a) = 0, \text{ где } 1 < n < j.$$

Определение 6 (выполнимой, истинной, общезначимой формулы):

6.1. Формула A называется *выполнимой* в модели $\mathbf{M} = \langle D, I \rangle$, если имеет приписывание B значений переменной формулы A , в котором $[A]^{I^B} = 3$.

6.2. Формула A называется *истинной* в модели $\mathbf{M} = \langle D, I \rangle$, если $[A]^{I^B} = 3$ для всех приписываний B в \mathbf{M} .

6.3. Формула A называется *ложной* в модели $\mathbf{M} = \langle D, I \rangle$, е! $[A]^{I^B} = 0$ для всех приписываний B в \mathbf{M} .

⁴ Ibid. P. 107–108.

6.4. Формула **A** называется *общезначимой*, е! **A** истинна во всех моделях языка $L(R_0)$.

Замечание. Данные определения выполнимой, истинной, общезначимой формулы подходят и для Эрбрановой модели, если не забывать, что приписывание значения переменной в эрбрановой **M** отождествляется с подстановкой констант на место переменных.

§ 3. Аксиомы и правила доказательства

В качестве исходных доказуемых формул, т.е. аксиом, этой логики принимаются аксиомы логики Роговского. (в доказательствах будем использовать также выводимые из них тавтологии).

Для удобства ссылок в доказательствах укажем эти пропозициональные аксиомы:

- [A0.1] $T(p > g) > (T(g > r) > (p > r))$; [A0.2] $T(p > g) > (p > Tg)$.
 [A0.3] $(p > g) > (Tp > \sim T\sim g)$; [A0.4] $T((p > g) > p) > p$.
 [A0.5] $T((p > g) > \sim g) > \sim g$; [A0.6] $T(p > g) > (\sim g > \sim p)$.
 [A0.7] $T(\sim g > \sim p) > (p > g)$; [A0.8] $(Yp > Yg) > Y(p > g)$.
 [A0.9] $Y(p > g) > (Yp > Yg)$; [A0.10] $p > (\sim p > (Bp > (Ip > g)))$.

Аксиомами первопорядковой логики направленности изменения являются следующие формулы [A1]–[A6]:

- [A1] $T \approx xA > A(t)$, терм t свободен для x в A .
 [A2] $\leftrightarrow xA > \sim T \sim A(t)$, терм t свободен для x в A .
 [A3] $T \approx x(C > A(x)) > (C > \leftrightarrow xA)$, x не входит свободно в C .
 [A4] $T \approx xBA > B \approx xA$.
 [A5.1] $\leftrightarrow xYA > Y \approx xA$; [A5.2] $Y \approx xA > \leftrightarrow xYA$; [A6] $\leftrightarrow xEA > E \approx xA$.

Принимается определение: [Df1]. $\exists xA(x) \equiv \sim \sim xA(x)$.

Терм t в [A1] и в [A2] может совпадать с x .

Правила вывода. Делятся на основные и производные. Знак «+» перед формулой означает, что формула доказуема.

Основные правила вывода:

- [П1] Если $+TA > B$ и $+A$, то $+B$ («правило отделения»).
- [П2] Правило подстановки (требования к подстановке обычные).
- [П3] Если $+A(\dots C \dots)$ и $C \equiv_{df} D$, то $+A(\dots D \dots)$ («правило дефинициальной замены»), где C и D подформулы формулы A .

[П4] Если $+A(x)$, то $+ \approx xA$ («правило обобщения»).

В доказательствах это правило будем обозначать через (Об.).

Производные правила вывода:

[П5] Если $+A > C$, то $+ TA > C$ («усиление антецедента»).

В доказательствах будем обозначать это правило через (Ус. ант.).

[П6] Если $+A > C$, то $+A > TC$ («усиление консеквента»).

В доказательствах будем обозначать это правило через (Ус. кон.).

[П7] Если $+A$, то $+TA$, т. е. если формула доказуема, то усиление этой формулы оператором «Т» доказуемо. В доказательствах будем обозначать это правило через (Ус.).

[П8] Если $+C > A(x)$, то $+C > \leftrightarrow xA$ («правило Бернайса»).

[П9] Если $+A(x) > C$, то $+ \exists xA > C$ («правило Бернайса»).

В правилах [П8] и [П9] переменная x не входит свободно в C . В доказательствах оба правила будем обозначать через (Бер.). Из контекста всегда ясно, какое из этих двух правил применяется.

[П10] Если $+C > D$ и $+D > C$ и $+A(...C...)$, то $+A^+(...D...)$, где A^+ получено из A заменой подформулы C на D («правило эквивалентной замены»).

[П11] Переименование связанных переменных. Оно стандартное. В доказательствах и выводах используется автоматически, т. е. без явных ссылок на это правило. Его точная формулировка и обоснование приведены ниже. Отметим, что производные правила не расширяют класс доказуемых формул.

Комментарий. В аксиоме [A4] встречается формулы вида $B \approx xA$, в которой оператор «В» находится перед квантором. Но то, что содержательно выражает, например, формула $B \approx xAx$, «возникает так, что все x имеют свойство A ». Никакой особой онтологии за формулой $B \approx xA$ (а также формулой вида $B \exists xA$) не скрывается. Отметим, что оператор «В» — истинностно-функциональный оператор, и если мы приписываем формуле $B \approx xA$, например, истинностное значение «3», то $\leftrightarrow xA$ имеет значение «2», и наоборот.

Определение 1 (доказательства, доказуемой формулы):

Определения стандартные.

Мы так же будем строить выводы формул из посылок в случае, если доказательство какой-то формулы очень длинное.

Определение 2 (вывода и выводимой формулы):

Вывод есть конечная последовательность формул, в которой каждая из них является либо посылкой, либо аксиомой, либо теоремой этой системы, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода этой формальной системы. *Выводимой формулой* называется последняя формула вывода.

Теорема дедукции. Если имеется вывод $\Gamma, A_0 + A$, в котором ни одна переменная относительно посылки A_0 не варьируется (т. е. остается фиксированной), то имеется и вывод $\Gamma + A_0 > A$.

Предполагаются стандартное определение *зависимого вхождения формулы* в вывод от посылки⁵ и обычное, принятое понимание фиксированной

⁵ См., напр.: Смирнов В. А. Формальный вывод и логическое исчисление. М., 1972. С. 27–28.

переменной⁶. Пропозициональная часть теоремы дедукции логики направленности доказана⁷. Доказательство теоремы дедукции для собственно первопорядковой логики изменения направленности ничем не отличается от доказательства этой теоремы в классической теории квантификации. Разбираются два случая: (а) вывод формулы $A(x)$ зависит от посылки A_{ϵ} ; (б) вывод формулы $A(x)$ не зависит от посылки A_{ϵ} ⁸. Доказательство квантифицируемой части теоремы опускаем.

Укажем обоснование производных правил.

Обоснование [П5] и обоснование [П6]:

- | | |
|--|---|
| 1. $A \rightarrow C$ — посылка правила [П5]. | 1. $A \rightarrow C$ — посылка правила [П6]. |
| 2. $T(A \rightarrow C) \rightarrow (TA \rightarrow C)$ — тавт. | 2. $T(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow TC)$ — A02. |
| 3. $TA \rightarrow C$ — 1, 2, П1. | 3. $A \rightarrow TC$ — 1, 2, П1. |

Обоснование [П7]:

1. A — посылка правила [П7].
2. $TA \rightarrow TA$ — тавт.
3. TA — 1, 2, П1.

Обоснование [П8]:

1. $+ C > A(x)$ посылка правила [П8], x не входит свободно в C .
2. $\leftrightarrow x(C > A(x))$ -1, (Об.).
3. $T \sim x(C > A(x)) > (C > \leftrightarrow xA)$ — (A4).
4. $(C > \leftrightarrow xA)$ (П1), 2, 3.

Обоснование второго правила Бернайс [П9] аналогично обоснованию первого, т. е. [П8], но надо предварительно доказать формулу:

$+ T \approx x(A(x) > C) > (\exists x A(x) > C)$:

1. $T \approx x(A(x) > C) > (A(x) > C)$ — A1.
2. $T \approx x(A(x) > C) > T(A(x) > C)$ — 1 (Ус. кон.).
3. $T(A(x) > C) > (\sim C > \sim A(x))$ — П2 в (A06).
4. $T \approx x(A(x) > C) > (\sim C > \sim A(x))$ — 2, 3, транз. на основании A0.1.
5. $T \approx x(A(x) > C) > \leftrightarrow x(\sim C > \sim A(x))$ — 4 (Бер.).
6. $T \approx x(A(x) > C) > T \approx x(\sim C > \sim A(x))$ — 5 (Ус. кон.).
7. $T \approx x(\sim C > \sim A(x)) > (\sim C > \leftrightarrow x \sim A(x))$ — (A3).
8. $T \approx x(A(x) > C) > (\sim C > \leftrightarrow x \sim A(x))$ — 6, 7, транз.
9. $T \approx x(A(x) > C) > T(\sim C > \leftrightarrow x \sim A(x))$ — 8 (Ус. кон.).
10. $T(\sim C > \leftrightarrow x \sim A(x)) > (\sim \sim x \sim A(x) > C)$ — под. в тав.: $T(\sim g > p) > (\sim p > g)$.
11. $T \sim x(A(x) > C) > (\sim \sim x \sim A(x) > C)$ — 9, 10, транз.
12. $T \approx x(A(x) > C) > (\exists x A(x) > C)$ — 15 (замена квантора по П3 и [Df.1]).

⁶ Клини С. Математическая логика. М., 1973. С. 133–134.

⁷ Прямая теорема дедукции для логики направленности Роговского // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. СПб., 2004. С. 535–538.

⁸ См.: Смирнов В. А. Формальный вывод и логическое исчисление, С. 34–35.

Соглашение. Дальше детальное использование (т.е. выписывание всех подстановок и применения правила П1) пропозициональных аксиом (А0.1), (А0.6) и (А0.7), а также тавтологий вида $T(\sim p \supset g) \supset (\sim g \supset p)$ и $T(p \supset \sim g) \supset (\sim g \supset p)$ опускается. Их сокращенное использование будет отмечаться как (*контр-поз.*). Мы также опускаем подробное использование пропозициональных тавтологий вида $T\sim\sim p \supset p$ и $Tr \supset \sim\sim r$ и их сокращенное использование будем отмечать (*сн. $\sim\sim$*). По контексту ясно, применяется ли (*сн. $\sim\sim$*) к антецеденту или к консеквенту имплицативной формулы. Кроме того, в доказательствах формул часто используется подстановка в тавтологию: $T(p \supset (g \supset r)) \supset (g \supset (p \supset r))$. Некоторые шаги доказательства, использующие эту тавтологию, будут опускаться. Факт использования этой тавтологии будет отмечаться как (*пер. пос.*), т. е. как перестановка посылок.

Обоснования [П10]:

Это правило есть следствие теоремы замены эквивалентных. Прежде чем приступить к доказательству теоремы, укажем на специфику эквивалентности в логике направленности изменений.

В ней имеются слабо эквивалентные формулы ($\phi_1 \approx \phi_2 =_{df} (\phi_1 \supset \phi_2) \wedge (\phi_2 \supset \phi_1)$) и сильно эквивалентные формулы ($\phi_1 \leftrightarrow \phi =_{df} (\phi_1 \supset \phi) \wedge (\phi \supset \phi_1)$, где $\bullet \in \{T, Y, E\}$). В слабой эквивалентности $\phi_1 \approx \phi_2$ таблицы истинности для ϕ_1 и ϕ_2 совпадают не только на классических значениях истинности $\{0, 3\}$, но и на средних значениях истинности $\{1, 2\}$. Формулы ϕ_1 и ϕ_2 *сильно эквивалентные*, если при всевозможных распределениях значений истинности из множества $G_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ они принимают значения истинности на подмножестве $\{0, 3\}$ множества G_4 , т. е. таблицы истинности для ϕ_1 и ϕ_2 совпадают только на классических значениях истинности $\{0, 3\}$. Слабо эквивалентные формулы не являются доказуемыми в этой логике, так как они не являются общезначимыми.

В объектном языке логики направленности изменения не используются знаки эквиваленции (ни слабой, ни сильной) и конъюнкции. Если A и A^+ сильно эквивалентные формулы, то $A \leftrightarrow A^+$ будут обозначать существование двух доказуемых формул $+A \rightarrow A^+$ и $+A^+ \rightarrow A$.

Важно отметить, что операторы «В» и «И» не сохраняют свойство доказуемости сильно эквивалентных формул в следующем смысле: если имеем $+A \rightarrow A^+$ и $+A^+ \rightarrow A$, то формулы $BA \rightarrow BA^+$ и $BA^+ \rightarrow BA$ (аналогично $IA \rightarrow IA^+$ и $IA^+ \rightarrow IA$) не являются доказуемыми. Этот факт понятен с семантической точки зрения. Операторы «В» и «И» превращают классические значения истинности «3» и «0» в средние значения истинности «1» и «2», но значение импликации на средних значениях истинности (для антецедента и консеквента) также является средним.

Остальные операторы \sim , T , Y , E сохраняют свойство доказуемости сильно эквивалентных формул. Деление операторов исследуемой логики на те, которые сохраняют свойство доказуемости эквивалентных формул, и те, которые

не сохраняют свойства доказуемости, должно учитываться в формулировке теоремы о замене эквивалентных. В случае операторов «В» и «И» заключение теоремы о замене эквивалентных будет иметь силу при определенных дополнительных условиях. Так как оператор «И» определим ($IA = -_{df} B \sim A -_{df} \sim BA$), то в формулировке теоремы ограничимся условием на оператор «В».

Теорема о замене эквивалентных. Пусть **С** и **Д** — произвольные формулы, имеющие одни и те же свободные переменные x_1, \dots, x_m (далее этот список переменных будем обозначать через $x_i, 1 \leq x_i \leq m$). Пусть формула $\leftrightarrow x_i(C \leftrightarrow D)$ доказуема. Пусть **С** есть подформула формулы **А** и **А⁺** получена из **А** в результате замены некоторого вхождения **С** в **А** на **Д**. Пусть $y_i (1 \leq j \leq n)$ есть список всех свободных переменных **А**.

Тогда формула $\leftrightarrow y_i(A \leftrightarrow A^+)$, $i \leq j$ доказуема для всех операторов, кроме оператора «В», она доказуема и для оператора «В» при условии, если формулы вида $\leftrightarrow y_i B(A \leftrightarrow A^+)$ является доказанной. При этом эквивалентность $\leftrightarrow y_i(A \leftrightarrow A^+)$ существует в двух формах: (экв. 1) — $\leftrightarrow y_i(A_1 \leftrightarrow A_1^+)$, и (экв. 2) — $\leftrightarrow y_i(TA_1 \leftrightarrow TA_1^+)$, (экв.2) выводима из (экв.1), но не наоборот.

Доказательство. Мы не рассматриваем случая, когда **С** вообще не заменяется на **Д**⁹. Не будем забывать, что $\leftrightarrow y_i(A \leftrightarrow A^+)$ обозначает пару доказуемых формул $+ \approx y_i(A \rightarrow A^+)$ и $+ \approx y_i(A^+ \rightarrow A)$. Сходным образом формула $\leftrightarrow x_i(C \leftrightarrow D)$ также обозначает пару доказуемых формул.

Доказательство проведено индукцией по построению формулы **А**.

Базис индукции. **А** есть элементарная формула. Тогда в результате замены получаем, что **А** есть **С**, и **А⁺** есть **Д**. Все свободные переменные формулы **А** есть $x_i, 1 \leq x_i \leq m$, тогда формула $\leftrightarrow y_i(A \leftrightarrow A^+)$ совпадает с $\leftrightarrow x_i(C \leftrightarrow D)$; последняя по условию теоремы является доказуемой формулой, т. е. $+ \approx x_i(C \rightarrow D)$ и $+ \approx x_i(D \rightarrow C)$.

Шаг индукции. Пусть утверждение теоремы верно для произвольных формул **А₁** и **А₂**, причем в каждую из них входит не более чем n логических связок и кванторов. Пусть **А** построена из $n+1$ логических связок и кванторов. Тогда **А** имеет следующие виды: (а) — **А** есть **А₁ > А₂**; (б) — **А** есть **•А₁**, где $\bullet \in \{\sim, T, U, E, B\}$; (с) — **А** есть $\leftrightarrow yA_1(y)$.

Для всех трех случаев предполагаем, что условие теоремы выполнимо, т. е. формулы **С** и **Д** таковы, что формула $\leftrightarrow x_i(C \leftrightarrow D)$ доказана, т. е. имеется $+ \approx x_i(C > D)$ и $+ \approx x_i(D > C)$. К тому же в силу индуктивного предположения принимаются в качестве доказанных следующие формулы:

⁹ Некоторые авторы в доказательстве этой теоремы допускают нулевую замену (С на Д), т.е. отсутствие замены. См., напр.: Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., 1984. С. 81–82; Черч А. Введение в математическую логику. М., 1960. С. 179–181. Исключение случая нулевой замены из доказательства теоремы не влияет на суть ее доказательства.

1.1. $\approx y_i (A_1 > A_1^+)$; 1.2. $\approx y_i (A_1^+ > A_1)$, т.е. $+ \leftrightarrow y_i (A_1 \leftrightarrow A_1^+)$.

2.1. $\approx y_i (A_2 > A_2^+)$; 2.2. $\approx y_i (A_2^+ > A_2)$, т.е. $\approx y_i (A_2 \leftrightarrow A_2^+)$.

Дальше для простоты доказательства вместо списка переменных y_i ($1 \leq j \leq n$) будет использована одна переменная «у».

Рассмотрим случай (а). Надо показать, что следующие формулы доказуемы:

3. $+ \leftrightarrow y(T(A_1 > A_2) > (A_1^+ > A_2^+))$; 4. $\approx y(T(A_1^+ > A_2^+) > (A_1 > A_2))$.

Докажем (3):

1. $\approx y (A_1^+ > A_1)$ — индукт. допущение (1.2).
2. $\leftrightarrow y (A_2 > A_2^+)$ — индукт. допущение (2.1).
3. $T(A_1^+(y) \rightarrow A_1(y)) \rightarrow [T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (T(A_2(y) \rightarrow A_2^+(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))]$ — П2 в тавт.: $T(p \rightarrow g) \rightarrow [T(g \rightarrow r) \rightarrow (T(r \rightarrow s) \rightarrow (g \rightarrow s))]$.
4. $T \approx y (A_1^+ > A_1) \rightarrow (A_1^+(y) > A_1(y))$ — (A1).
5. $T \approx y (A_1^+ > A_1) \rightarrow [T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (T(A_2(y) \rightarrow A_2^+(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))]$ — 4, 3, транз. по A01.
6. $T \sim y (A_1^+ > A_1) \rightarrow T[T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (T(A_2(y) \rightarrow A_2^+(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))]$ — 5 (Ус. кон.).
7. $T[T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (T(A_2(y) \rightarrow A_2^+(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))] \rightarrow (T(A_2(y) \rightarrow A_2^+(y)) \rightarrow ((T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y))))$ — П2 в тавт.: $T(p \rightarrow (g \rightarrow r)) \rightarrow (g \rightarrow (p \rightarrow r))$.
8. $T \sim y (A_1^+ > A_1) \rightarrow (T(A_2(y) \rightarrow A_2^+(y)) \rightarrow ((T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))$ — 6, 7, транз.
9. $T(A_2(y) \rightarrow A_2^+(y)) \rightarrow ((T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))$ — 1, 8, П1.
10. $T \approx y (A_2 > A_2^+) \rightarrow (A_2(y) > A_2^+(y))$ — (A1).
11. $T \approx y (A_2 > A_2^+) \rightarrow T(A_2(y) > A_2^+(y))$ — (Ус. кон.).
12. $T \approx y (A_2 > A_2^+) \rightarrow ((T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))$ — 11, 9, транз.
13. $T \approx y (A_2 > A_2^+) \rightarrow \leftrightarrow y ((T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))$ — 12 (Бер.).
14. $\leftrightarrow y ((T(A_1(y) \rightarrow A_2(y)) \rightarrow (A_1^+(y) \rightarrow A_2^+(y)))$ — 2, 13, П1.

Сходным образом доказывается формула 4. Стало быть, это означает, что имеется $+ \leftrightarrow y(T(A_1 > A_2) \leftrightarrow T(A_1^+ > A_2^+))$.

Замечание. Разобранный случай **A** есть $A_1 > A_2$ есть (экв. 2). Этот случай недоказуем в форме (экв. 1). Это дедуктивно объясняется тем, что при доказательстве указанных формул используются аксиомы и формулы, в антецедентах которых присутствует оператор «Т» и от него невозможно избавиться при помощи транзитивности, т. е. при помощи [A0.1]. Такая же ситуация будет иметь место, когда будем разбирать случай **A** есть $\leftrightarrow y A_1$.

Разберем случай (b), который имеет подслучай.

(b₁). **A** есть $\sim A_1$.

Надо доказать $+ \leftrightarrow y(\sim A_1 \rightarrow \sim A_1^+)$ и $\leftrightarrow y(\sim A_1^+ \rightarrow \sim A_1)$, т.е. $+ \leftrightarrow y(\sim A_1 \leftrightarrow \sim A_1^+)$.

1. $\leftrightarrow y_1 (A_1 > A_1^+) - \text{индук. доп. (1.1)}.$
2. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow (A_1(y) > A_1^+(y)) - (A1).$
3. $T \sim y(A_1 > A_1^+) \rightarrow T(A_1(y) > A_1^+(y)) - 2 \text{ (Ус. кон.)}.$
4. $T(A_1(y) > A_1^+(y)) \rightarrow (\sim A_1^+(y) \rightarrow \sim A_1(y)) - \text{П2 в A06}.$
5. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow (\sim A_1^+(y) \rightarrow \sim A_1(y)) - 3, 4, \text{ транз. по A01}.$
6. $T \sim y(A_1 > A_1^+) \rightarrow \leftrightarrow y(\sim A_1^+(y) \rightarrow \sim A_1(y)) - 5 \text{ (Бер.)}.$
7. $\leftrightarrow y(\sim A_1^+(y) \rightarrow \sim A_1(y)) - 1, 6, \text{ П1}.$

Сходным образом доказывается формула $\leftrightarrow y(\sim A_1(y) \rightarrow \sim A_1^+(y))$. Значит, формула $+ \leftrightarrow y(\sim A_1(y) \leftrightarrow \sim A_1^+(y))$.

(b₂). А есть TA_1 . Надо доказать $\leftrightarrow y(TA_1(y) \leftrightarrow TA_1^+(y))$.

1. $\leftrightarrow y_1 (A_1 > A_1^+) - \text{индук. доп. (1.1)}.$
2. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow (A_1(y) > A_1^+(y)) - (A1).$
3. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow T(A_1(y) > A_1^+(y)) - 2 \text{ (Ус. кон.)}.$
4. $T(A_1(y) > A_1^+(y)) \rightarrow (TA_1(y) > TA_1^+(y)) - \text{П2 в тав.: } T(p \rightarrow g) \rightarrow (Tp \rightarrow Tg).$
5. $T \sim y(A_1 > A_1^+) \rightarrow (TA_1(y) > TA_1^+(y)) - 3, 4, \text{ транз. по A01}.$
6. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow \leftrightarrow y(TA_1(y) > TA_1^+(y)) - 5 \text{ (Бер.)}.$
7. $\leftrightarrow y(TA_1(y) > TA_1^+(y)) - 1, 6, \text{ П1}.$

Сходным образом доказывается формула $\leftrightarrow y(TA_1^+(y) \rightarrow TA_1(y))$. Значит, имеем $+ \sim y(TA_1(y) \leftrightarrow TA_1^+(y))$.

(b₃). А есть YA_1 . Надо доказать $+ \leftrightarrow y(YA_1 \leftrightarrow YA_1^+)$.

1. $\leftrightarrow y_1 (A_1 > A_1^+) - \text{индук. доп. (1.1)}.$
2. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow (A_1(x) > A_1^+(x)) - (A1).$
3. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow T(A_1(x) > A_1^+(x)) - 2 \text{ (Ус. кон.)}.$
4. $T(A_1(x) > A_1^+(x)) \rightarrow Y(A_1(x) > A_1^+(x)) - \text{П2 в тавт.: } Tp \rightarrow Yp.$
5. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow Y(A_1(x) > A_1^+(x)) - 3, 4, \text{ транз. по A01}.$
6. $Y(A_1(x) > A_1^+(x)) \rightarrow (YA_1(x) > YA_1^+(x)) - A09.$
7. $T \approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow (YA_1(x) > YA_1^+(x)) - 5, 6, \text{ транз. по A01}.$
8. $T \sim y(A_1 > A_1^+) \rightarrow \leftrightarrow y(YA_1(y) > YA_1^+(y)) - 7 \text{ (Бер.)}.$
9. $\leftrightarrow y(YA_1(y) > YA_1^+(y)) - 1, 8, \text{ П1}.$

Сходным образом доказывается формула $\leftrightarrow y(YA_1^+ > YA_1)$, т. е. имеем $+ \leftrightarrow y(YA_1 \leftrightarrow YA_1^+)$.

(b₄). А есть EA_1 . Надо доказать $+ \leftrightarrow y(EA_1 \leftrightarrow EA_1^+)$.

Доказательство аналогично предыдущему. Используются тавтологии $Tr \rightarrow Er$ и $E(p \rightarrow g) \rightarrow (Ep \rightarrow Eg)$.

(b₅). А есть BA_1 . Надо доказать $+ \leftrightarrow y(BA_1 \leftrightarrow BA_1^+)$.

1. $\leftrightarrow yB(A_1 \rightarrow A_1^+) - \text{условие теоремы для оператора «В»}.$
2. $T \sim yB(A_1 \rightarrow A_1^+) \rightarrow B(A_1(y) \rightarrow A_1^+(y)) - A1.$
3. $T \approx yB(A_1 \rightarrow A_1^+) \rightarrow TB(A_1(y) \rightarrow A_1^+(y)) - 2 \text{ (Ус. кон.)}.$
4. $TB(A_1(y) \rightarrow A_1^+(y)) \rightarrow (BA_1(y) \rightarrow BA_1^+(y)) - \text{П2 в тав.:}$

$ТВ(p \rightarrow g) \rightarrow (Вр \rightarrow Вg).$

5. $Т\approx yB(A_1 \rightarrow A_1^+) \rightarrow (BA_1(y) \rightarrow BA_1^+(y))$ — 3, 4, транз. по A01.

6. $Т\approx yB(A_1 \rightarrow A_1^+) \rightarrow \leftrightarrow y(BA_1(y) \rightarrow BA_1^+(y))$ — 5 (Бер.).

7. $\leftrightarrow y(BA_1(y) \rightarrow BA_1^+(y))$ — 1, 6, П1.

Сходным образом доказывается формула $\leftrightarrow y(BA_1^+(y) \rightarrow BA_1(y))$. Значит, мы имеем $\leftrightarrow y(BA_1 \leftrightarrow BA_1^+)$.

(с). А есть $\leftrightarrow yA_1$. Надо доказать $\leftrightarrow yA_1 \rightarrow \approx yA_1^+$ и $\leftrightarrow yA_1^+ \rightarrow \approx yA_1$, т. е. $\leftrightarrow yA_1 \leftrightarrow \approx yA_1^+$.

Предварительно докажем следующую формулу:

(*). $Т\approx y(A_1(y) > A_1^+(y)) \rightarrow (Т\approx yA_1(y) > \leftrightarrow yA_1^+(y)).$

1. $Т\sim y(C(y) > D(y)) > (C(y) > D(y))$ — (A1).

2. $C(y) > [(Т\sim y(C(y) > D(y))) > D(y)]$ — 1, (пер. пос.).

3. $Т\approx yC(y) > C(y)$ — (A1).

4. $Т\approx yC(y) > [(Т\approx y(C(y) > D(y))) > D(y)]$ — 3, 2 (транз.).

5. $Т\approx yC(y) > [\sim D(y) > \sim(Т\sim y(C(y) > D(y)))]$ — 4 (контр.) и (транз.).

6. $\sim D(y) > [Т\sim yC(y) > \sim(Т\sim y(C(y) > D(y)))]$ — 5 (пер. пос.).

7. $\sim[Т\sim yC(y) > \sim(Т\sim y(C(x) > D(y)))] > D(y)$ — 6 (контр.) и (сн. $\sim\sim$).

8. $\sim[Т\sim yC(y) > \sim(Т\approx y(C(x) > D(y)))] > \leftrightarrow yD(y)$ — 7 (Бер.).

9. $\sim\approx yD(y) > [Т\sim yC(y) > \sim(Т\approx y(C(y) > D(y)))]$ — 8 (контр.) и (сн. $\sim\sim$).

10. $Т\sim y(C(y) > D(y)) > (Т\approx yC(y) > \leftrightarrow yD(y))$ — 9 (пер. пос.), (контр.) и (транз.).

1. $\leftrightarrow y(A_1 > A_1^+)$ — индук. доп. (1.1).

2. $Т\approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow (A_1(y) > A_1^+(y))$ — (A1).

3. $Т\sim y(A_1 > A_1^+) \rightarrow \leftrightarrow y(A_1(y) > A_1^+(y))$ — 2 (Бер.).

4. $Т\approx y(A_1 > A_1^+) \rightarrow Т\approx y(A_1(y) > A_1^+(y))$ — 3 (Ус. кон.).

5. $Т\approx y(A_1(y) > A_1^+(y))$ — 1, 3, П1.

(6). $Т\sim y(A_1(y) > A_1^+(y)) \rightarrow (Т\approx yA_1(y) > \leftrightarrow yA_1^+(y))$ — (*).

(7). $ТТ\approx y(A_1(y) > A_1^+(y)) \rightarrow (Т\sim yA_1(y) > \leftrightarrow yA_1^+(y))$ — 6 (Ус. ант.).

(8). $(Т\approx yA_1(y) > \leftrightarrow yA_1^+(y))$ — 5, 7, П1.

Аналогично доказывается формула $(Т\approx yA_1^+ \rightarrow \approx yA_1)$, т. е. имеем $\leftrightarrow yA_1 \leftrightarrow \approx yA_1^+$.

Доказательство теоремы завершено.

Замечание. Все разобранные случаи, кроме случаев А есть $A_1 > A_2$ и А есть $\leftrightarrow yA_1$, доказаны в форме (экв.1). Эти случаи также доказуемы и в форме (экв.2).

Следствие 1 (теоремы о замене эквивалентных). Пусть С, Д, А, и A^+ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда, если $\vdash \approx \chi_1(C \rightarrow D)$ и $\vdash \approx \chi_1(D \rightarrow C)$ и $\vdash A$, то $\vdash A^+$.

Тем самым правило [П10] обосновано.

Обоснование [П11]:

Используется стандартное понятие *подобных* формул $A(x)$ и $A(y)^{10}$, где «х» и «у» — различные переменные. Формулы $A(x)$ и $A(y)$ называются *подобными*,

если переменная y свободна для переменной x в формуле $A(x)$ (т. е. если в результате подстановки y вместо x , y не окажется связанной квантором переменной в формулу $A(y)$), и наоборот, если переменная x свободна для переменной y в формуле $A(y)$.

Утверждение. Если формулы $A(x)$ и $A(y)$ подобны, то $\vdash T \approx xA(x) > \leftrightarrow yA(y)$ и $\vdash T \sim yA(y) > \leftrightarrow xA(x)$ ($\vdash T \exists xA(x) > \exists yA(y)$ и $\vdash T \exists yA(y) > \exists xA(x)$).

Доказательство:

1. $T \sim xA(x) > A(y) - (A1).$
2. $T \approx xA(x) > \leftrightarrow yA(y) - 1, (Бер.).$
3. $T \sim yA(y) > A(x) - (A1).$
4. $T \sim yA(y) > \leftrightarrow xA(x) - 3 (Бер.).$

Доказательства $\vdash T \exists xA(x) > \exists yA(y)$ и $\vdash T \exists yA(y) > \exists xA(x)$ опускаются.

Следствие 2 (переименование связанных переменных). Если $\leftrightarrow xA(x)$ (соответственно $\exists xA(x)$) есть подформула формулы A , $A(y)$ подобна $A(x)$ и A^+ есть результат замены хотя бы одного вхождения $\leftrightarrow xA(x)$ в A на $\sim yA(y)$, то $\vdash A \rightarrow A^+$ и $\vdash A^+ \rightarrow A$.

Доказательство на основании «Следствия 1» и «Утверждения».

§4. Некоторые доказуемые формулы

а) Формулы введения квантора существования и отношения между кванторами:

- | | |
|--|--|
| 1. $TA(y) > \exists xA.$ | 2. $A(y) > \sim T \sim \exists xA.$ |
| 3. $T \approx x \sim A > \sim \exists xA.$ | 4. $T \approx xA > \sim \exists x \sim A.$ |
| 5. $T \sim \exists x \sim A > \leftrightarrow xA.$ | 6. $T \sim \approx xA > \exists x \sim A.$ |
| 7. $T \sim \exists xA > \leftrightarrow x \sim A.$ | 8. $T \exists x \sim A > \sim \approx xA.$ |
| | 9. $T \approx xA > \exists xA.$ |

б) Кванторы и операторы:

- | | |
|--|--|
| 1. $T \approx xA \leftrightarrow \leftrightarrow xTA.$ | 2. $\exists xTA \leftrightarrow T \exists xA.$ |
| 3. $\exists xYA \leftrightarrow Y \exists xA.$ | 4. $E \exists xA \rightarrow \exists xEA.$ |

в) Сильное отрицание, слабое отрицание и кванторы:

По определению, сильное отрицание есть $\neg A \equiv_{\text{df}} \sim TA$, где « \sim » — слабое отрицание.

- | | |
|---|---|
| 1. $\leftrightarrow x \neg A \leftrightarrow \neg \sim \approx xA.$ | 2. $\exists x \neg A \leftrightarrow \neg \sim \exists xA.$ |
| 3. $\neg \sim \approx xA > \neg \sim \exists xA.$ | 4. $\leftrightarrow xA > \neg \sim \approx xA.$ |
| 5. $\exists xA > \neg \sim \exists xA.$ | 6. $\neg \neg \approx xA > \leftrightarrow xA.$ |
| | 7. $\neg \sim \exists xA > \exists xA.$ |

¹⁰ См., напр.: Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., 1984. С. 71.

д) Пронесение «внутри» и вынесение «наружу» кванторов и операторов в импликативных формулах (Ограничения на вхождения переменных в формулы обычные):

1. $T \approx x(C(x) \supset D(x)) \supset (T \sim xC(x) \supset \sim xD(x)).$
2. $T \approx x(C(x) \supset D(x)) \supset (\exists x C(x) \supset \exists x D(x)).$
3. $T \approx xB(C(x) \supset D(x)) \supset (T \approx xBC(x) \supset \approx xBD(x)).$
4. $T \approx xB(C(x) \supset D(x)) \supset (\exists x BC(x) \supset \exists x BD(x)).$
5. $T \approx xE(C(x) \supset D(x)) \supset (T \approx xEC(x) \supset \approx xED(x)).$
6. $T \sim xE(C(x) \supset D(x)) \supset (\exists x EC(x) \supset \exists x ED(x)).$
7. $T \approx xY(C(x) \supset D(x)) \supset (T \approx xYC(x) \supset \leftrightarrow xYD(x)).$
8. $T \approx xY(C(x) \supset D(x)) \supset (\exists x YC(x) \supset \exists x YD(x)).$
9. $T \approx x(A(x) \supset C) \supset (\exists x A(x) \supset C).$
10. $T \approx x(BA(x) \supset C) \supset (\exists x BA(x) \supset C).$
11. $T \sim x(EA(x) \supset C) \supset (\exists x EA(x) \supset C).$
12. $T \approx x(YA(x) \supset C) \supset (\exists x YA(x) \supset C).$
13. $T(\exists x A(x) \supset C) \supset \leftrightarrow x(A(x) \supset C).$
14. $T(\exists x BA(x) \supset C) \supset \leftrightarrow x(BA(x) \supset C).$
15. $T(\exists x EA(x) \supset C) \supset \leftrightarrow x(EA(x) \supset C).$
16. $T(\exists x YA(x) \supset C) \supset \leftrightarrow x(YA(x) \supset C).$
17. $T \exists x(A(x) \supset C) \supset (T \approx xA(x) \supset C).$
18. $T \exists x(BA(x) \supset C) \supset (T \approx xBA(x) \supset C).$
19. $T \exists x(EA(x) \supset C) \supset (T \approx xEA(x) \supset C).$
20. $T \exists x(YA(x) \supset C) \supset (T \approx xYA(x) \supset C).$
21. $(T \approx xA(x) \supset C) \supset \exists x(A(x) \supset C).$
22. $(T \approx xBA(x) \supset C) \supset \exists x(BA(x) \supset C).$
23. $(T \sim xEA(x) \supset C) \supset \exists x(EA(x) \supset C).$
24. $(T \approx xYA(x) \supset C) \supset \exists x(YA(x) \supset C).$

е) Перестановка кванторов и «пронесение» операторов через кванторы.

1. $+T \exists x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists y \exists x A(x, y).$
2. $+T \approx x \sim y A(x, y) \rightarrow \leftrightarrow y \approx x A(x, y).$
3. $+T \exists x \approx y A(x, y) \rightarrow \leftrightarrow y \exists x A(x, y).$
4. $+TB \exists x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \exists y BA(x, y).$
5. $T \approx x \sim y BA(x, y) \rightarrow B \approx x \sim y A(x, y).$
6. $+Y \approx x \approx y A(x, y) \rightarrow \leftrightarrow x \approx y YA(x, y).$
7. $+ \approx x \approx y AY(x, y) \rightarrow Y \approx x \approx y A(x, y).$
8. $+Y \exists x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \exists y YA(x, y).$
9. $+ \exists x \exists y YA(x, y) \rightarrow Y \exists x \exists y A(x, y).$
10. $+E \exists x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \exists y AE(x, y).$